

Но применение эллиптических функций  $\wp u$  и  $\sigma u$ , а также использование теоретико-числовых соображений позволили ему разыскать как достаточные, так и необходимые условия приведения этого интеграла к типу псевдо-эллиптических, а также найти все частные случаи, когда такое приведение возможно.

Метод, отличный от всех предыдущих и названный «дериивационным», применил к рассматриваемой задаче Н. В. Бугаев<sup>1</sup>. Он представил условие для выражения эллиптического интеграла в конечном виде в форме детерминанта. Но это условие является только достаточным, поэтому метод Бугаева не давал определенного ответа в случае, если оно не выполнялось<sup>2</sup>.

Следовательно, только П. Л. Чебышев и Е. И. Золотарев решили задачу полностью и в самом общем виде. Методы же, введенные их последователями, не позволяли сделать этого, хотя и приносили облегчение в отдельных частных случаях.

Параллельно с решением рассмотренного выше вопроса идут исследования в другом направлении, связанном с ним, которое представляет поиски новых методов приведения интегралов

$$\int f(x, \sqrt{R(x)}) dx, \quad (9)$$

где  $R(x)$  — полином степени не выше четвертой, к канонической форме эллиптических интегралов и выражение их там, где это возможно, через эллиптические функции.

К интегралу (9) со времен Лежандра применялось преобразование

$$x = \frac{A + By}{1 + Cy}, \quad (10)$$

где коэффициенты определялись так, чтобы полином под знаком корня содержал только члены четной степени.

В 1864 году Н. Н. Алексеев опубликовал<sup>3</sup> свой способ нахождения коэффициентов, опирающийся на исследования Серре и состоящий в определении корней соответственно выбранной резольвенте, которая имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta^3 - (3p^2 - 8q)\Theta^2 + (3p^4 - 16p^2q + 16q^2 + 16pr - \\ - 64s)\Theta - (p^3 - 4pq + 8r)^2 = 0, \end{aligned}$$

причем  $\Theta = t^2$ , а  $t = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ , где  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — корни полинома  $R(x)$ . С помощью корней резольвенты Н. Н. Алексеев выражает не только коэффициенты  $A, B, C$  преобразования (10), но модуль  $k$  эллиптического интеграла и множитель  $M$  в равенстве

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = M \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

<sup>1</sup> Н. В. Бугаев. Complément à un problème d'Abel. Comptes rendus, t. 118. Paris, 1891, pp. 1025—1028; Выражение эллиптических интегралов в конечном виде. М. 1892; Общие условия интегрируемости в конечном виде эллиптического дифференциала. СПб., 1892.

<sup>2</sup> Именно поэтому работы Н. В. Бугаева вызвали возражения со стороны А. А. Маркова, изложенные им в рапорте президенту Академии наук. См. Архив АН СССР, Ленингр. отд., ф. 143, оп. I, № 51.

<sup>3</sup> Н. Алексеев. Sur la réduction d'une integrale, contenant un radical de second degré d'un polinôme de quatrième, à la forme canonique d'une integrale elliptique et sur le calcul du module. Comptes rendus, t. 59. Paris, 1864, pp. 244—248. На русском языке этот способ был изложен Н. Н. Алексеевым в кн.: «Интегральное исчисление», т. II. М. 1874, гл. VI.

Cela étant, on a

$$xu'' + 2(ax + \gamma)u' + (2a\gamma - a)u = 0.$$

» Or la dernière équation n'admet une solution

$$u = \text{une fonction entière de } x$$

que pour les valeurs de

$$\frac{a - 2a\gamma}{2a} = \frac{a}{2a} - \gamma,$$

entières et plus grandes que  $-1$ .

» Par exemple, dans le cas

$$a = 1 \quad \text{et} \quad h = \frac{15}{4},$$

on trouve, parmi les fonctions  $z$  satisfaisant à l'équation différentielle

$$x^4(z' + z^2) + 2x^2z - x^4 - x^3 - \frac{15}{4}x^2 - 2x + 1 = 0,$$

deux rationnelles

$$z = -1 - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x} + \frac{2}{2x+3}$$

et

$$z = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x} + \frac{4x-4}{2x^2-4x+3}$$

et, conformément à cela,

$$y = C_1 e^{-x + \frac{1}{x}} x^{-\frac{3}{2}} (2x+3) + C_2 e^{x + \frac{1}{x}} x^{-\frac{3}{2}} (2x^2 - 4x + 3)$$

est l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire

$$x^4 y'' + 2x^2 y' - (x^4 + x^3 + \frac{15}{4}x^2 + 2x - 1)y = 0. »$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Complément à un problème d'Abel.*

Note de M. BOUGAIEF, présentée par M. Darboux.

« Abel a démontré que l'intégrale elliptique  $\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{R}}$  peut être quelquefois présentée sous la forme

$$(I) \quad \int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{m} \log \left( \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}} \right),$$

où  $R$  est un polynôme de quatrième degré

$$R = p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4;$$

$p$  et  $q$  sont des polynômes entiers premiers entre eux. Dans le cas où  $q$  est un polynôme de degré  $\lambda$ ,  $p$  est de degré  $\lambda + 2$  et  $m = 2(\lambda + 2)$ .

» La condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients du polynôme  $R$  pour que le polynôme  $q$  soit du degré  $\lambda$  peut être représentée par l'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_\lambda \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{\lambda+1} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \dots & \alpha_{\lambda+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_\lambda & \alpha_{\lambda+1} & \alpha_{\lambda+2} & \dots & \dots & \alpha_{2\lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$\alpha_0 = \frac{D^3(\sqrt{p_0})}{\Pi(3)}, \quad \alpha_1 = \frac{D^4(\sqrt{p_0})}{\Pi(4)}, \quad \dots, \quad \alpha_\lambda = \frac{D^{\lambda+2}(\sqrt{p_0})}{\Pi(\lambda+2)},$$

$$\Pi(n) = 1.2.3 \dots n,$$

et  $D^\lambda(\sqrt{p_0})$  est une dérivation de l'expression  $\sqrt{p_0}$  de l'ordre  $\lambda$ .

» En calculant une dérivation  $Df(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ , il faut suivre, en général, les règles de la différentiation et prendre en considération les conditions suivantes de la dérivation

$$Dp_0 = p_1, \quad Dp_1 = 2p_2, \quad Dp_2 = 3p_3, \quad \dots, \quad Dp_n = (n+1)p_{n+1},$$

de sorte que l'on ait

$$Df(p_0, p_1, \dots, p_n) = \frac{df}{dp_0} p_1 + \frac{df}{dp_1} 2p_2 + \frac{df}{dp_2} 3p_3 + \dots + \frac{df}{dp_n} (n+1)p_{n+1}.$$

» Dans le cas considéré

$$p_5 = 0, \quad p_6 = 0, \quad \dots$$

» On peut bien voir qu'il existe un nombre infini de cas d'intégrabilité de l'expression (1).

» Les plus simples conditions sont les suivantes :

$$(3) \quad \alpha_0 = \frac{D^3(\sqrt{p_0})}{1.2.3} = 0,$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2 = 0.$$

» Pour  $p_0 = 1$ , la condition (3) donne l'équation

$$8p_3 - 4p_1p_2 + p_1^3 = 0.$$

» La condition (4) prend une forme de l'équation

$$\{4D^3(\sqrt{p_0})D^5(\sqrt{p_0}) - 5[D^4(\sqrt{p_0})]^2\}_{p_0=1} = 0,$$

déjà assez compliquée.

» En désignant les expressions  $D(\sqrt{p_0})$ ,  $D^2(\sqrt{p_0})$ , ...,  $D^\lambda(\sqrt{p_0})$  par  $D_1$ ,  $D_2$ , ...,  $D_\lambda$ , on trouve les équations suivantes entre les quantités  $D_\mu$  :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{p_0}D_1 &= p_1, \\ D_1^2 + \sqrt{p_0}D_2 &= p_2, \\ \sqrt{p_0}D_3 + 3D_1D_2 &= 3p_3, \\ \sqrt{p_0}D_4 + 4D_1D_3 + 3D_2^2 &= 12p_4. \end{aligned}$$

» En général, pour chaque nombre pair  $p$ , on a

$$(5) \quad 2\sqrt{p_0} \frac{D_p}{\Pi(p)} + \frac{2D_1D_{p-1}}{\Pi(p-1)} + \frac{2D_2D_{p-2}}{\Pi(2)\Pi(p-2)} + \dots \left[ \frac{D_{\frac{p}{2}}}{\Pi(\frac{p}{2})} \right]^2 = 0,$$

et pour chaque nombre impair  $i$

$$(6) \quad \sqrt{p_0} \frac{D_i}{\Pi(i)} + \frac{D_1D_{i-1}}{\Pi(i-1)} + \frac{D_2D_{i-2}}{\Pi(2)\Pi(i-2)} + \dots = 0,$$

» Les nombres  $p$  et  $i$  sont plus grands que 4.

» Les équations (5) et (6) donnent le moyen de calculer plus vite les coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  du déterminant (2).

» *Exemple.* — Pour l'intégrale  $\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{x^4-2x^2-x}}$ , on a

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, & p_1 &= 0, & p_2 &= -2, & p_3 &= -1, & p_4 &= 0, \\ D_1 &= 0, & D_2 &= -2, & D_3 &= -3, & D_4 &= -12, & D_5 &= -60, \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = \frac{D_3}{1.2.3} = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha_1 = \frac{D_5}{1.2.3.4} = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha_2 = \frac{D_5}{1.2.3.4.5} = -\frac{1}{2}.$$

» Donc

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = 0.$$



» Le polynôme  $q$  est de premier et  $p$  de troisième degré,  $m = 6$ . En effet,

$$\int \frac{(x + \frac{1}{3}) dx}{\sqrt{x^3 - 2x^2 - x}} = \frac{1}{6} \log \left[ \frac{2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 + (2x - 2)\sqrt{x^3 - 2x^2 - x}}{2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 - (2x - 2)\sqrt{x^3 - 2x^2 - x}} \right]. »$$

**OPTIQUE.** — *Sur un nouveau réfractomètre.* Note de M. C. FÉRY, présentée par M. Schützenberger (1).

« L'importance de la mesure des indices de réfraction n'est plus à démontrer : tant au point de vue théorique que pratique, la connaissance de ce facteur donne des indications précieuses; aussi plusieurs appareils ont-ils été imaginés pour remplacer la méthode classique un peu longue et délicate du goniomètre.

» Cependant aucun d'eux ne remplit encore, d'une manière complète, les conditions multiples exigées pour un tel appareil, qui doit ne nécessiter l'application d'aucune formule, ne demander aucun réglage ni manipulation délicate pouvant influencer sur l'exactitude du résultat et cependant présenter de l'exactitude et de la précision.

» C'est cette lacune que j'ai cru combler en imaginant l'appareil que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui.

» Le principe sur lequel il repose est très simple : il consiste à annuler par un prisme solide d'angle variable et d'indice constant la déviation imprimée à un rayon lumineux par un prisme creux d'angle fixe et assez petit qui est rempli du liquide à mesurer.

» L'angle que devra avoir le prisme solide permettra d'évaluer l'indice inconnu du corps à étudier. En effet, si nous prenons des angles prismatiques assez petits pour que la formule

$$n = \frac{i}{r}$$

soit applicable, nous pourrons écrire, quand le rayon émergent ayant traversé les deux prismes sortira parallèle à sa direction incidente,

$$(n - 1)x = (x - 1)A,$$

---

Ce travail a été fait à l'École municipale de Physique et de Chimie, laboratoire de M. le professeur Baille.

517

Б 902

ВЫРАЖЕНІЕ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ  
ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ.

Н. В. Бугаева.

МОСКВА.

1892.

Цѣна 40 коп.



Д.      Ф.      И.  
Ч. ДОП.      ЧИТЬ  
УЖЕ

134512

ПРОПЕРИО  
20 04 Г.



101364

ВЫРАЖЕНІЕ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ  
ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ.

Н. В. Бугаева.



МОСКВА.  
Университетская типографія, Страст. бульв.  
1892

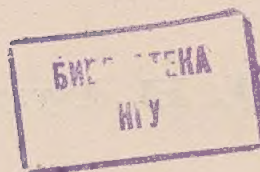
к



517.26

Б 902

134512



Издание Московскаго Математическаго Общества, состоящаго при  
Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.  
Математическій Сборникъ, Т. XVI.



# ВЫРАЖЕНІЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ.

Н. В. Бугаева.

(Читано въ засѣданіи Математическаго Общества 19 ноября 1891 года).

§ 1. Общая постановка вопроса. Вопросу о выраженіи эллиптическихъ интеграловъ, въ конечномъ видѣ посвящено много изслѣдованій.

Этотъ вопросъ начатъ изысканіями Абеля <sup>1)</sup> объ интегрированіи дифференціала

$$\frac{(x + A)dx}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}}.$$

Изслѣдованія Абеля продолжали Liouville, Чебышевъ <sup>2)</sup>, Піума <sup>3)</sup>, Золотаревъ <sup>4)</sup>, Вейерштрассъ, Пташицкій <sup>5)</sup>.

<sup>1)</sup> *Abel*. Sur l'intégration de la formule différentielle  $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$ ,  $R$  et  $\rho$  étant des fonctions entières. Oeuvres complètes 1839. T. I.

<sup>2)</sup> *Tchebychef*. Sur l'intégration de la différentielle

$$\frac{(x + A)dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}$$

Bulletin. 1860.

b) Journal des mathématiques. 1853 и 1858.

<sup>3)</sup> *Annali de matematica*. 1861.

<sup>4)</sup> *Золотаревъ*. Теорія комплексныхъ чиселъ. Спб., 1874.

<sup>5)</sup> *Пташицкій*. Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ эллиптическихъ дифференціаловъ. Спб., 1888.



Метода Абеля находится въ тѣсной связи съ разложеніемъ  $\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}$  въ непрерывную дробь. Всѣ остальные изслѣдователи прямо и непосредственно примыкаютъ къ методу Абеля, присоединяя къ ней еще пріемъ преобразованія переменныхъ.

Этими изслѣдованіями въ значительной степени исчерпанъ вопросъ въ его связи съ теоріею непрерывныхъ дробей.

Въ настоящей статьѣ мы имѣемъ въ виду указать на связь этого вопроса съ вопросомъ о нахожденіи раціональных частныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій, а слѣдовательно и на его связь съ началомъ наибольшихъ и наименьшихъ показателей.

Эта связь можетъ въ будущемъ повести къ изслѣдованіямъ въ другомъ направленіи и представляетъ свои выгоды при вычисленіяхъ. Кромѣ того эта связь двухъ вопросовъ отличается своею простотою.

Положимъ, согласно съ Абелемъ, что эллиптическій интегралъ выражается помощію логарифмической функціи формулою:

$$\int \frac{Mdx}{N\sqrt{R}} = \lg \left( \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}} \right) \quad (1)$$

гдѣ  $M$ ,  $N$  цѣлые, а  $p$  и  $q$  цѣлые и взаимно простые полиномы.

$$R = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4.$$

Взявъ дифференціалъ уравненія (1), получаемъ уравненіе:

$$\frac{Mdx}{N\sqrt{R}} = \frac{pq dR + 2(pdq - qdp)R}{(p^2 - q^2R)\sqrt{R}}$$

откуда для опредѣленія  $p$  и  $q$  Абель получаетъ два уравненія:

$$pq \frac{dR}{dx} + 2 \left( p \frac{dq}{dx} - q \frac{dp}{dx} \right) R = M \quad (2)$$

$$p^2 - Rq^2 = N. \quad (3)$$

Взявъ производную уравненія (3), получаемъ уравненіе:

$$2p \frac{dp}{dx} - \frac{dR}{dx} q^2 - 2q \frac{dq}{dx} R = \frac{dN}{dx}. \quad (4)$$

Умножая уравненіе (2) на  $p$  и замѣняя  $p^2$  и  $2p \frac{dp}{dx}$  ихъ величинами, опредѣляемыми изъ уравненій (3) и (4), получаемъ уравненіе:

$$\begin{aligned} & \frac{dR}{dx} q(N - Rq^2) + 2R \frac{dq}{dx} (N + Rq^2) - \\ & - Rq \left( \frac{dN}{dx} + \frac{dR}{dx} q^2 \right) + 2Rq \frac{dq}{dx} = Mp \end{aligned}$$

или уравненіе:

$$\left( N \frac{dR}{dx} - R \frac{dN}{dx} \right) q + 2NR \frac{dq}{dx} = Mp. \quad (5)$$

§ 2. Дифференціальныя уравненія, рѣшающія вопросъ. Такъ какъ академикъ Чебышевъ показалъ, что вопросъ о выраженіи интеграла  $\int \frac{Mdx}{N\sqrt{R}}$  приводится къ вопросу о представленіи въ конечномъ видѣ интеграла:

$$\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{R}}$$

то, не нарушая общности вопроса, мы можемъ при изслѣдованіи положить:

$$M = m(x + A)C \quad (6)$$

$$N = C \quad (7)$$

гдѣ  $C$  нѣкоторое произвольное постоянное.

Уравненіе (1) приметъ видъ:

$$\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{m} \lg \left( \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}} \right) \quad (8)$$



Вопросъ объ условіяхъ, при которыхъ имѣетъ мѣсто уравненіе (8), приводится къ опредѣленію  $p, q, m, A$  при помощи совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$pq \frac{dR}{dx} + 2 \left( p \frac{dq}{dx} - q \frac{dp}{dx} \right) R = m(x + A)C \quad (9)$$

$$p^2 - Rq^2 = C. \quad (10)$$

Уравненія (9) и (10) получаются прямо изъ уравненій (2) и (3).

Уравненіе (5) даетъ уравненіе:

$$2R \frac{dq}{dx} + \frac{dR}{dx} q = m(x + A)p. \quad (11)$$

### § 3. Предварительныя заключенія о полиномахъ $p, q$ и числѣ $m$ .

Три уравненія (9), (10) и (11) даютъ возможность судить о цѣлыхъ полиномахъ  $p, q$  и количествѣ  $m$ . Означивъ по Абелю степень полиномовъ  $p$  и  $q$  черезъ  $\delta(p)$  и  $\delta(q)$  и полагая

$$\delta(p) = \mu, \quad \delta(q) = \lambda$$

мы на основаніи уравненія (10) находимъ:

$$\delta(p^2) = \delta(R) + \delta(q^2)$$

или

$$2\mu = 2\lambda + 4$$

$$\mu = \lambda + 2.$$

Отсюда

**Первое заключеніе:** Уравненіе  $\mu = \lambda + 2$  показываетъ, что степень цѣлаго полинома  $p$  на двѣ единицы больше степени цѣлаго полинома  $q$ .

Полагаемъ

$$p = \alpha_1 x^{\lambda+2} + \alpha_2 x^{\lambda+1} + \alpha_3 x^{\lambda} + \dots \quad (13)$$

$$q = \beta_1 x^{\lambda} + \beta_2 x^{\lambda-1} + \dots \quad (14)$$

Разсмотримъ тотъ случай, когда  $c_i = 1$ , и полиномъ 4-й степени  $R$  данъ въ видѣ

$$R = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + x^4$$

Сравнивая коэффициенты при  $x^{2\lambda+4}$  уравненія (10), находимъ соотношеніе:

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 0,$$

откуда имѣемъ

$$\alpha_1 = \beta_1 \text{ и}$$

$$\alpha_1 = -\beta_1.$$

Отсюда

Второе заключеніе: *Кoeffициенты при старшихъ степеняхъ полиномовъ  $p$  и  $q$  равны или имѣютъ противоположный знакъ.*

Разсмотримъ порядки членовъ дифференціального уравненія (11). Порядки его членовъ будутъ:

$$\delta \left( 2R \frac{dq}{dx} \right) = \lambda + 3,$$

$$\delta \left( \frac{dR}{dx} q \right) = \lambda + 3,$$

$$\delta(mxp) = \lambda + 3,$$

$$\delta(mAp) = \lambda + 2.$$

Мы разсмотримъ случай, когда

$$\alpha_1 = \beta_1. \quad (15)$$

Будемъ обозначать коэффиціентъ при  $x^m$  у полинома  $Q$  черезъ  $K_m(Q)$ , тогда на основаніи уравненія (11) имѣемъ соотношеніе:

$$K_{\lambda+3} \left( 2R \frac{dq}{dx} \right) + K_{\lambda+3} \left( \frac{dR}{dx} q \right) = m K_{\lambda+3}(xp)$$



или

$$2\lambda\alpha_1 + 4\alpha_1 = m\alpha_1,$$

откуда имѣемъ соотношеніе:

$$2(\lambda + 2) = m \quad (16)$$

изъ котораго вытекаетъ

*Третье заключеніе: Число  $m$  есть всегда число чѣтное и равно удвоенному показателю полинома  $p$ .*

Уравненіе (8) показываетъ, что коэффициентъ при старшей степени  $x$  полинома  $p$  всегда можетъ быть приведенъ къ 1, слѣдовательно мы можемъ всегда положить:

$$\alpha_1 = \beta_1 = 1. \quad (a)$$

Полиномы  $p$  и  $q$  принимаютъ видъ:

$$p = x^{\lambda+2} + \alpha_2 x^{\lambda+1} + \dots \quad (17)$$

$$q = x^\lambda + \beta_2 x^{\lambda-1} + \dots \quad (18)$$

Мы въ дальнѣйшемъ изложеніи будемъ представлять полиномы  $p$  и  $q$  въ видѣ:

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2\lambda+2} x^{2\lambda+2} \quad (19)$$

$$q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_\lambda x^\lambda \quad (20)$$

гдѣ на основаніи уравненія (15)

$$a_{2\lambda+2} = b_\lambda = 1.$$

Представленіе полиномъ  $p$  и  $q$  въ формѣ (19) и (20), какъ увидимъ впослѣдствіи, удобно для дериваціонныхъ вычисленій.

#### § 4. Простѣйшая связь между полиномами $p$ и $q$ .

Взявъ производную уравненія (10), получаемъ уравненіе:

$$2p \frac{dp}{dx} = q \left( \frac{dR}{dx} q + 2R \frac{dq}{dx} \right). \quad (21)$$

Такъ какъ  $p$  и  $q$  взаимно-простые полиномы, то уравненіе

(21) показываетъ, что полиномъ  $\frac{dp}{dx}$  дѣлится нацѣло на полиномъ  $q$ .

Означая частное отъ дѣленія  $\frac{dp}{dx}$  на  $q$  черезъ  $\xi$ , получимъ соотношение:

$$\frac{dp}{dx} = q\xi. \quad (22)$$

Изъ уравненія

$$\delta\left(\frac{dp}{dx}\right) = \delta q + \delta\xi$$

или

$$\lambda + 1 = \lambda + \delta(\xi)$$

видно, что  $\delta(\xi) = 1$ , слѣдовательно  $\xi$  есть выраженіе первой степени.

Вставляя выраженіе (22) въ уравненіе (21), получимъ по сокращеніи на  $q$  равенство:

$$\frac{dR}{dx} q + 2R \frac{dq}{dx} = 2p\xi \quad (23)$$

На основаніи уравненія (11) имѣемъ:

$$\frac{dR}{dx} q + 2R \frac{dq}{dx} = m(x + A)p$$

слѣдовательно

$$m(x + A)p = 2p\xi,$$

откуда

$$\xi = \frac{1}{2} m(x + A). \quad (24)$$

Такимъ образомъ между  $p$  и  $q$  устанавливается простая зависимость, выражаемая уравненіемъ:

$$2 \frac{dp}{dx} = m(x + A)q. \quad (25)$$



§ 5. Основные линейныя дифференціальныя уравненія, опредѣляющія полиномы  $p$  и  $q$ .

Изъ двухъ уравненій:

$$2 \frac{dp}{dx} = m(x + A)q \quad (25)$$

$$2R \frac{dq}{dx} + \frac{dR}{dx} q = m(x + A)p \quad (11)$$

легко получается то линейное дифференціальное уравненіе втораго порядка, которому удовлетворяетъ цѣлая функція  $q$ .

Изъ уравненія (25) имѣемъ:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x + A} \left( 2R \frac{dq}{dx} + \frac{dR}{dx} q \right) = m \frac{dp}{dx} = \frac{m^2}{2} (x + A)q,$$

откуда получаемъ окончательно линейное дифференціальное уравненіе втораго порядка:

$$4(x + A)R \frac{d^2 q}{dx^2} + 2 \left[ 3(x + A) \frac{dR}{dx} - 2R \right] \frac{dq}{dx} + \left[ 2(x + A) \frac{d^2 R}{dx^2} - 2 \frac{dR}{dx} - m^2(x + A)^3 \right] q = 0. \quad (I)$$

Это уравненіе мы будемъ называть *основнымъ уравненіемъ*.

Полагая въ уравненіи (I)

$$q = e^{\int u dx}$$

мы послѣ сокращеній получаемъ дифференціальное уравненіе перваго порядка:

$$4(x + A)R \frac{du}{dx} + 4(x + A)Ru^2 + 2 \left[ 3(x + A) \frac{dR}{dx} - 2R \right] u + 2(x + A) \frac{d^2 R}{dx^2} - 2 \frac{dR}{dx} - m^2(x + A)^3 = 0 \quad (26)$$

интеграломъ котораго будетъ раціональная функція

$$u = \frac{1}{q} \frac{dq}{dx}.$$

Изъ уравненія (25) также получаемъ уравненія:

$$mq = \frac{2}{x+A} \frac{dp}{dx},$$

$$m \frac{dq}{dx} = \frac{2}{x+A} \frac{d^2p}{dx^2} - \frac{2}{(x+A)^2} \frac{dp}{dx}.$$

Вставляя эти величины въ уравненіе (11) послѣ приведенія къ одному знаменателю, получаемъ линейное дифференціальное уравненіе втораго порядка:

$$4R(x+A) \frac{d^2p}{dx^2} + 2 \left[ \frac{dR}{dx} (x+A) - 2R \right] \frac{dp}{dx} = m^2 (x+A)^3 p, \quad (\text{II})$$

которому удовлетворяетъ функція  $p$ .

Три уравненія (25), (I) и (II) совершенно достаточны для рѣшенія вопроса, т. е. для опредѣленія полиномовъ  $p$ ,  $q$  и количествъ  $m$ ,  $A$ , удовлетворяющихъ уравненію (8).

Если будетъ найденъ полиномъ  $q$ , то по уравненію (25) найдемъ и полиномъ  $p$  и обратно.

§ 6. Дериwационныя уравненія для опредѣленія полиномовъ  $p$  и  $q$ .

Лучше всего начать опредѣленіе съ полинома  $q$ . Для этого нужно найти цѣлый частный интегралъ дифференціального уравненія (I). При этомъ однако встрѣтится затрудненіе въ томъ, что мы не знаемъ величины цѣлаго числа  $\lambda$ , то есть степени этого полинома и числа  $m = 2(\lambda + 2)$ . Въ такомъ случаѣ придется отыскивать интегралы этого уравненія въ предположеніяхъ:

$$\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$m = 4, 6, 8, 10, \dots$$

то есть рѣшать вопросъ о томъ, не будутъ ли частными интегралами уравненія (I) полиномы степени 0, 1, 2, 3, ... и т. д.

Вмѣсто того, чтобы вести вычисленіе такимъ образомъ, мы предлагаемъ дериваціонный приѣмъ, который гораздо быстрее ведетъ къ цѣли.

Въ уравненія (8)

$$\int \frac{(x + A)dx}{\sqrt{c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4}} = \frac{1}{m} \lg \left( \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}} \right) \quad (8)$$

гдѣ

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2\lambda+1}x^{2\lambda+1} + a_{2\lambda+2}x^{2\lambda+2}$$

$$q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{\lambda-1}x^{\lambda-1} + b_{\lambda}x^{\lambda}$$

мы полагаемъ

$$c_4 = 1, \quad a_{2\lambda+2} = 1, \quad b_{\lambda} = 1.$$

При примѣненіи дериваціоннаго приѣма мы должны помнить, что дериваціи находятъ также какъ и дифференціалы, и дериваціи коэффициентовъ удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$Dc_0 = c_1$$

$$Dc_1 = 2c_2$$

$$Dc_2 = 3c_3$$

$$Dc_3 = 4c_4 = 4$$

$$Dc_4 = 0$$

$$Da_0 = a_1$$

$$Da_1 = 2a_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Da_{2\lambda+1} = (2\lambda + 2)a_{2\lambda+2} = 2\lambda + 2$$

$$Da_{2\lambda+2} = 0$$

$$Db_0 = b_1$$



$$Db_2 = 2b_2$$

.....

$$Db_{\lambda-1} = \lambda b_{\lambda} = \lambda$$

$$Db_{\lambda} = 0$$

Кромѣ того

$$DA = 1.$$

Количества  $m$  и  $\lambda$  при дериваціи должно считать постоянными. Нашъ дериваціонный пріемъ изложенъ въ нашемъ сочиненіи «Общія основанія исчисления  $E\varphi(x)$ »<sup>1)</sup>.

Уравненіе (25) при  $x = 0$  даетъ уравненіе

$$2a_1 = mAb_0$$

или уравненіе

$$a_1 = (\lambda + 2)Ab_0 \quad (27)$$

Это уравненіе послѣ ряда послѣдовательныхъ деривацій и сокращеній даетъ уравненія:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (\lambda + 2)Ab_0 \\ 2a_2 &= (\lambda + 2)(b_0 + Ab_1) \\ 3a_3 &= (\lambda + 2)(b_1 + Ab_2) \\ 4a_4 &= (\lambda + 2)(b_2 + Ab_3) \\ &\dots\dots\dots \\ na_n &= (\lambda + 2)(b_{n-2} + Ab_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Изъ этихъ уравненій видно, что какъ скоро извѣстны  $A, b_0, b_1, b_2 \dots b_n \dots b_{\lambda-1}$  и  $\lambda$ , мы легко можемъ опредѣлить коэффициенты  $a_1, a_2, \dots a_n$ .

Уравненіе (11) даетъ при  $x = 0$  дериваціонное уравненіе:

$$2c_0b_1 + c_1b_0 = mAa_0, \quad (29)$$

изъ котораго можно опредѣлить  $a_0$  по  $b_0$  и  $b_1$ .

<sup>1)</sup> Бугаевъ. Общія основанія исчисления  $E\varphi x$ ; стр. 152—162; или Мат. Сб. томъ XIII, стр. 54—64.

Уравненіе (I) при  $x = 0$  по сокращеніи на 2 даетъ дериваціонное уравненіе:

$$4c_0Ab_2 + (3c_1A - 2c_0)b_1 + [2c_2 - c_1 - 2(\lambda + 2)^2A^3]b_0 = 0. \quad (30)$$

Это уравненіе мы будемъ называть *основнымъ дериваціоннымъ уравненіемъ*.

Оно само, а также его дериваціи дадутъ всѣ необходимыя уравненія для опредѣленія  $b_0, b_1, b_2$  коэффициентовъ полинома  $q$  и величины  $A$  въ различныхъ предположеніяхъ для цѣлаго числа  $\lambda$ . Эти же уравненія дадутъ и условія, которымъ должны удовлетворять коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, c_3$  полинома  $R$  для различныхъ предположеній относительно  $\lambda$  для того, чтобы интеграль эллиптической могъ быть представленъ въ формѣ (8). Вопросъ такимъ образомъ рѣшается въ общемъ видѣ и не является никакой необходимости прибѣгать къ разложенію  $\sqrt{R}$  въ непрерывную дробь.

## § 7. Различные частные случаи.

Чтобы показать примѣненіе основнаго дериваціоннаго уравненія (30) къ рѣшенію вопроса о выраженіи эллиптическихъ интеграловъ въ конечной формѣ (8), рассмотримъ различные частные случаи.

*Первый случай. Полиномъ  $q$  нулевой степени.*

Въ этомъ случаѣ

$$q = b_0 = 1$$

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 = a_0 + a_1x + x^2.$$

Въ основномъ уравненіи (30) мы должны положить:

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 0$$

$$\lambda = 0, m = 4.$$

Уравненіе (30) приметъ видъ:

$$2c_2A - c_1 - 8A^3 = 0. \quad (31)$$

Первая деривація этого уравненія даетъ:

$$6c_3A - 24A^2 = 0 \text{ или } c_3A - 4A^2 = 0. \quad (32)$$

Вторая деривація даетъ:

$$c_3 - 4A = 0. \quad (33)$$

Третья деривація даетъ:

$$0 = 0.$$

Три уравненія (31), (32), (33) даютъ всѣ элементы для рѣшенія вопроса.

Опредѣляя  $A$  изъ уравненія (32), мы находимъ два рѣшенія:

$$A = 0 \text{ и } A = \frac{c_3}{4}.$$

Первый случай:  $A = 0$ .

На основаніи уравненій (31) и (33) получимъ условія

$$c_1 = 0, \quad c_3 = 0.$$

Такимъ образомъ первый случай будетъ относиться къ интегралу

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + c_2 x^2 + c_0}},$$

который, какъ извѣстно, изображается въ конечномъ видѣ.

Второй случай даетъ

$$A = \frac{c_3}{4}.$$

Вставляя эту величину въ уравненіе (31), мы послѣ приведенія получаемъ условіе:

$$c_3^3 + 8c_1 - 4c_2c_3 = 0. \quad (34)$$

Это есть извѣстное условіе, при которомъ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{R}} = \frac{1}{4} \lg \left( \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sqrt{R}}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - \sqrt{R}} \right).$$



На основаніи уравненія (29) имѣемъ:

$$a_0 = \frac{c_1}{c_3}.$$

На основаніи уравненій (29) находимъ:

$$a_1 = \frac{c_3}{2}$$

и слѣдовательно

$$\int \frac{x + \frac{c_3}{4}}{\sqrt{x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0}} = \frac{1}{4} \lg \frac{\frac{c_1}{c_3} + \frac{c_3}{2} x + x^2 + \sqrt{R}}{\frac{c_1}{c_3} + \frac{c_3}{2} x + x^2 - \sqrt{R}}$$

при условіи

$$c_3^3 + 8c_1 - 4c_2 c_3 = 0. \quad (34)$$

§ 8. Случай, когда полиномъ  $q$  первой степени.

Въ этомъ случаѣ

$$q = b_0 + x.$$

Полиномъ  $p$  будетъ третьей степени.

Въ основномъ деривационномъ уравненіи (30) слѣдуетъ положить:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0$$

$$\lambda = 1, \quad m = 6.$$

Основное уравненіе приметъ видъ:

$$3c_1 A - 2c_0 + (2c_2 A - c_1 - 18A^3)b_0 = 0. \quad (35)$$

Послѣдовательныя дериваціи послѣ сокращеній даютъ:

$$4c_2 A - 9A^3 + 3(c_3 A - 9A^2)b_0 = 0, \quad (35a)$$

$$4c_2 + 15c_3 A - 54A^2 + 3(c_3 - 14A)b_0 = 0, \quad (36)$$

$$c_3 = 3A + b_0. \quad (37)$$

Деривація послѣдняго уравненія даетъ тождество:

$$4c_4 = 4 = 3 + 1.$$

а) Уравненіе (35) показываетъ, что возможно рѣшеніе при  $A = 0$ . Въ этомъ случаѣ коэффиціенты должны удовлетворять условіямъ:

$$\left. \begin{aligned} 2c_0 + c_1 b_0 &= 0 \\ 4c_2 + 3c_3 b_0 &= 0 \\ c_3 &= b_0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Исключивъ  $b_0$  мы видимъ, что должны существовать два условія:

$$\left. \begin{aligned} 2c_0 + c_1 c_3 &= 0 \\ 4c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

которымъ должны удовлетворять коэффиціенты полинома  $R$  для того, чтобы было возможно уравненіе (8).

б) Если же  $A$  не равно нулю, то въ этомъ случаѣ, сокративъ на  $A$  уравненіе (35), получимъ уравненіе:

$$4c_2 - 9A^2 + 3(c_3 - 9A)b_0 = 0$$

или уравненіе

$$9A^2 + 3(9A - c_3) = 4c_2.$$

Деривація этого уравненія послѣ сокращенія даетъ:

$$3A + b_0 = c_3.$$

Такимъ образомъ для случая, когда  $A$  неравно нулю, получимъ систему трехъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} 3c_1 A - 2c_0 + (2c_2 A - c_1 - 18A^3)b_0 &= 0 \\ 9A^2 + 3(9A - c_3)b_0 &= 4c_2 \\ 3A + b_0 &= c_3 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

изъ которыхъ найдемъ  $A$  и  $b_0$ .

Если исключимъ  $A$  и  $b_0$ , найдемъ условіе, которому должны удовлетворять коэффициенты, для того, чтобы эллиптическій интегралъ могъ быть представленъ въ формѣ (8).

Кoeffициенты  $a_0, a_1, a_2$  могутъ быть найдены изъ уравненій (28) и (29).

§ 9. П р и м ѣ р ъ. Примѣняя эти уравненія къ интегралу:

$$\int \frac{(x + A)dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - x}}$$

мы полагаемъ:

$$\lambda = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 0,$$

$$m = 2(\lambda + 2) = 6,$$

$$c_0 = 0, \quad c_1 = -1, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 1.$$

Система уравненій (40) приметъ для этого случая видъ:

$$-3A + (1 - 4A - 18A^3)b_0 = 0,$$

$$9A^2 + 27Ab_0 = -8,$$

$$3A + b_0 = 0.$$

Изъ этихъ уравненій найдемъ:

$$A = \frac{1}{3}, \quad b_0 = -1, \quad b_1 = 1.$$

Уравненіе (29) даетъ:

$$a_0 = \frac{1}{2}.$$

Уравненія (28) дадутъ:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 1;$$



слѣдовательно

$$\int \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - x}} dx =$$

$$= \frac{1}{6} \lg \left[ \frac{x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2} + (x-1)\sqrt{x^4 - 2x^2 - x}}{x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2} - (x-1)\sqrt{x^4 - 2x^2 - x}} \right].$$

Вообще, если желаемъ опредѣлить условія того, чтобы интегралъ выражался въ конечномъ видѣ по формулѣ (8), гдѣ  $q$  полиномъ степени  $n$ , слѣдуетъ положить:  $\lambda = n$ ,  $b_n = 1$  и взять  $n+1$  деривацій уравненія (30), тогда получимъ  $n+2$  уравненій, изъ которыхъ найдемъ  $n+1$  величинъ  $b_0, b_1 \dots b_{n-1}$ ,  $A$ . Исключивъ изъ  $n+2$  уравненій  $n+1$  величинъ, находимъ то соотношеніе между коэффициентами полинома  $R$ , при которомъ имѣетъ мѣсто уравненіе (8).

При этихъ дериваціяхъ слѣдуетъ полагать:

$$b_n = 1, b_{n+1} = 0, b_{n+2} = 0$$

и т. д.

Дальнѣйшія дериваціонныя уравненія должны давать простыя тождества или уравненія, которыя являются простыми слѣдствіями предыдущихъ уравненій. При практическомъ примѣненіи нашихъ формулъ къ опредѣленію полинома  $q$  можетъ послужить уравненіе (I) еще инымъ способомъ.

Означая черезъ  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  корни полинома  $R$ , мы, вставивъ одинъ изъ корней въ уравненіе (I), получаемъ уравненіе:

$$6 \int \left[ (x+A) \frac{dR}{dx} \cdot \frac{dq}{dx} \right] + \int \left[ 2(x+A) \frac{d^2 R}{dx^2} - 2 \frac{dR}{dx} - m(x+A)^3 \right] = 0.$$

Это уравненіе представляетъ зависимость между коэффициентами  $q$  и числомъ  $A$ . Такъ какъ такихъ уравненій можно

написать 4, то можно найти четыре таких соотношенія, которыя также могут послужить къ рѣшенію вопроса.

Можно также отыскивать дериваціи этихъ уравненій.

§ 10. Дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ дробь  $\frac{p}{q}$ .

Можно интегралъ (8) привести къ виду:

$$\int \frac{(x + A)dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{m} \lg \left( \frac{\frac{p}{q} + \sqrt{R}}{\frac{p}{q} - \sqrt{R}} \right) = \frac{1}{m} \lg \left( \frac{z + \sqrt{R}}{z - \sqrt{R}} \right) \quad (41)$$

гдѣ

$$z = \frac{p}{q}.$$

Въ этомъ случаѣ  $z$  есть раціональная функція, у которой степень числителя на двѣ единицы болѣе степени знаменателя.

Взявъ производную, мы видимъ, что  $z$  удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$2(x + A)(z^2 - R) = \frac{dR}{dx} z - 2R \frac{dz}{dx} \quad (42)$$

или уравненію

$$2R \frac{dz}{dx} + m(x + A)z^2 - \frac{dR}{dx} z = m(x + A)R. \quad (43)$$

Уравненіе (43) есть уравненіе извѣстнаго типа

$$\frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + S = 0.$$

Вопросъ объ опредѣленіи  $\frac{p}{q}$  приводится къ опредѣленію частнаго интеграла уравненія (43) въ формѣ раціональной дроби.

Мы доказали, что такой интегралъ всегда можно найти, если только онъ существуетъ. Приемы, которыми онъ опредѣляется, изложены въ нашей статьѣ <sup>1)</sup>. На этомъ основаніи мы считаемъ вопросъ о представленіи эллиптической функціи въ формѣ (8) рѣшеннымъ.

Кромѣ того уравненіе (43) и приемы его интегрированія прямо даютъ раціональное объясненіе, почему вопросъ этотъ находится въ тѣсной и необходимой связи съ теоріей непрерывныхъ дробей.

§ 11. Нѣкоторыя критическія замѣчанія. Такое рѣшеніе вопроса, по которому его рѣшеніе ставится въ связь съ опредѣленіемъ частнаго интеграла въ формѣ раціональной дроби дифференціального уравненія (43), отличается большею общностью сравнительно съ тою, какая была дана у Абеля. У Абеля этотъ вопросъ приводится къ рѣшенію двухъ совокупныхъ уравненій:

$$pq \frac{dR}{dx} + 2 \left( p \frac{dq}{dx} - q \frac{dp}{dx} \right) R = m(x+A)C \quad (9)$$

$$p^2 - Rq^2 = C, \quad (10)$$

Такимъ образомъ оставался не рѣшеннымъ вопросъ, существуютъ ли иныя рѣшенія для  $p$  и  $q$  кромѣ тѣхъ, которыя удовлетворяютъ уравненію (10) и всѣ ли рѣшенія исчерпываются уравненіями (9) и (10).

Оказывается, что не всѣ рѣшенія исчерпываются этими уравненіями и существуютъ рѣшенія или полиномы  $P$  и  $Q$ , которые не удовлетворяютъ уравненію (10).

Эти рѣшенія въ постановкѣ Абеля какъ бы ускользаютъ отъ вниманія изслѣдователя.

---

<sup>1)</sup> *Бугаевъ*. Дробные частные интегралы дифференціальныхъ уравненій. (Приложеніе къ LXVII тому Записокъ Императорской академіи наукъ Спб., 1891, № 4).



Причина этого заключается въ томъ, что, взявъ производную уравненія (8), мы для большей общности должны были бы положить эти уравненія не въ формѣ (9) и (10), а въ формѣ уравненій:

$$pq \frac{dR}{dx} + 2 \left( p \frac{dq}{dx} - q \frac{dp}{dx} \right) R = m(x + A)\psi(x) \quad (44)$$

$$p^2 - Rq^2 = \psi(x) \quad (45)$$

гдѣ  $\psi(x)$  есть произвольная цѣлая функція.

Такимъ образомъ пришлось бы изслѣдовать множество другихъ случаевъ, или доказать, что нѣтъ иныхъ формъ для  $\psi(x)$  кромѣ постояннаго числа, допускающихъ рѣшеніе вопроса въ формѣ (8). Приведеніе вопроса къ уравненію (43) не требуетъ этихъ дополнительныхъ изысканій и даетъ всѣ возможныя рѣшенія вопроса.

Чтобы доказать, что уравненіе (42) можетъ обнаружить рѣшенія, не удовлетворяющія уравненію (10), замѣтимъ, что если  $z$  есть интегралъ уравненія (42), то и  $\frac{R}{z}$  будетъ тоже его интеграломъ.

Дѣйствительно, вставивъ вмѣсто  $z$  выраженіе  $\frac{R}{z}$ , получимъ:

$$m(x + A) \left( \frac{R}{z^2} - R \right) = \frac{dR}{dx} \cdot \frac{R}{z} - \frac{2R}{z^2} \left( z \frac{dR}{dx} - R \frac{dz}{dx} \right)$$

или

$$m(x + A)(R - z^2) = -z \frac{dR}{dx} + 2R \frac{dz}{dx},$$

что послѣ перемѣны знака дастъ прежнее уравненіе (42).

Такимъ образомъ если  $z = \frac{p}{q}$  служить интеграломъ уравненія (43), то и  $u = \frac{qR}{p}$  будетъ тоже его интеграломъ.

Такимъ образомъ

$$P = qR, \quad Q = p$$

будутъ тоже рѣшеніями, удовлетворяющими уравненію:

$$\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{m} \lg \left[ \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} \right]$$

между тѣмъ какъ

$$P^2 - RQ^2 = C.$$

Дѣйствительно

$$P^2 - PQ^2 = q^2 R^2 - Rp^2 = -R(p^2 - Rq^2) = -RC.$$

Такимъ образомъ существуютъ рѣшенія, соотвѣтствующія уравненіямъ (44) и (45), въ которыхъ  $\psi(x) = -R$ .

Правда, эти рѣшенія легко получаются изъ предыдущихъ, тѣмъ не менѣе они какъ бы ускользаютъ отъ вниманія изслѣдователей.

§ 12. Связь рѣшеній  $P=qR$  и  $Q=p$  съ непрерывными дробями. Не трудно показать, что эти рѣшенія тоже получаются изъ разложенія  $\sqrt{R}$  въ непрерывную дробь. Если имѣть мѣсто уравненіе (8),  $\sqrt{R}$  разлагается въ періодическую непрерывную дробь. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно,

$$\sqrt{R} = r_0 + \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1} + \dots + \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{2r_0} + \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1} + \dots \quad (46)$$

Въ послѣднемъ случаѣ разложеніе можно представить въ видѣ:

$$\sqrt{R} = r_0 + \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1} + \dots + \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{r_0} + r_0 + \frac{1}{\mu_0} + \dots$$

или въ видѣ

$$\sqrt{R} = r_0 + \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1} + \dots + \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{r_0} + \sqrt{R} \quad (47)$$

Положивъ

$$\frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} = r_0 + \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1} + \dots + \frac{1}{\mu_0}$$

$$\frac{P_s}{Q_s} = r_0 + \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} + \dots + \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{r_0}$$

находимъ

$$\frac{P_s}{Q_s} = \frac{P_{s-1}r_0 + P_{s-2}}{Q_{s-1}r_0 + Q_{s-2}}. \quad (48)$$

Изъ уравненія (47) также выходитъ:

$$\sqrt{R} = \frac{P_{s-1}(r_0 + \sqrt{R}) + P_{s-2}}{Q_{s-1}(r_0 + \sqrt{R}) + Q_{s-2}} \quad (49)$$

откуда получаемъ соотношеніе:

$$Q_{s-1}r_0\sqrt{R} + RQ_{s-1} + Q_{s-2}\sqrt{R} = P_{s-1}r_0 + P_{s-1}\sqrt{R} + P_{s-2}.$$

Это соотношеніе даетъ два равенства:

$$RQ_{s-1} = P_{s-1}r_0 + P_{s-2} = P_s \quad (50)$$

$$RQ_{s-1}r_0 + Q_{s-2} = P_{s-1} = Q_s, \quad (51)$$

слѣдовательно

$$P_s Q_s = R P_{s-1} Q_{s-1}. \quad (52)$$



Такъ какъ

$$\frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} = \pm \frac{1}{Q_{s-1} Q_s},$$

то

$$P_s Q_{s-1} - Q_s P_{s-1} = \pm 1. \quad (53)$$

На основаніи уравненій (50) и (51) имѣемъ:

$$P_{s-1} = Q, \quad Q_{s-1} = \frac{P_s}{R},$$

слѣдовательно соотношеніе (53) даетъ:

$$\frac{P_s^2}{R} - Q^2 = \pm 1$$

или

$$P_s^2 - RQ^2 = \pm R \quad (54)$$

Изъ соотношенія (53) выходитъ также равенство:

$$P_{s-1}^2 - RQ_{s-1}^2 = \mp 1. \quad (55)$$

Изъ равенствъ (54) и (55) видно, что рѣшенія

$$p^2 - Rq^2 = R$$

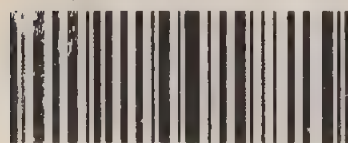
заключаются въ томъ же разложеніи  $\sqrt{R}$  въ непрерывную дробь, какъ и рѣшенія уравненія

$$p^2 - Rq^2 = \pm 1.$$


---



ная библиотека НГУ



1800198322



## СОЧИНЕНІЯ ТОГО ЖЕ АВТОРА:

1. Руководство къ ариметикѣ. Ариметика цѣлыхъ чиселъ. Изд. шестое. Ц. 40 к.
2. Руководство къ Ариметикѣ. Ариметика дробныхъ чиселъ. Изд. шестое. Ц. 50 к.
3. Задачникъ къ ариметикѣ цѣлыхъ чиселъ. Изд. 2-е. Ц. 25 к.
4. Задачникъ къ ариметикѣ дробныхъ чиселъ. Изд. 2-е. Ц. 30 к.
5. Начальная алгебра. Изд. 2-е. Ц. 1 р. 25 к.
6. Вопросы къ алгебрѣ. Ц. 15 к.
7. Начальная геометрія. Планиметрія. Ц. 1 р.
8. Начальная геометрія. Стереометрія. Ц. 50 к.
9. Сергій Алексѣевичъ Усовъ. Ц. 40 к.
10. О свободѣ воли.

- 
1. Сходимость безконечныхъ рядовъ по ихъ внѣшнему виду. Ц. 1 р. 50 к.
  2. Числовыя тождества, находящіяся въ связи съ свойствами символа  $E$ . Ц. 1 р. 50 к.
  3. Ученіе о числовыхъ производныхъ. Ц. 3 р. 50 к.
  4. Нѣкоторыя приложенія теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи функцій прерывныхъ. Ц. 3 р. 50 к.
  5. Общія основанія исчисления  $E_f(x)$  съ однимъ независимымъ переменнымъ. Ц. 4 р.
  6. Введеніе въ теорію чиселъ. Изд. 2-е. Ц. 20 к.
  7. Интегрируемыя формы дифференціальныхъ уравненій. Ц. 30 к.
  8. Математика, какъ орудіе научное и педагогическое. Изд. второе. Ц. 20 к.
  9. Нѣкоторыя частныя теоремы для числовыхъ функцій. Ц. 20 к.
  10. Дифференціальныя уравненія 1-го порядка. Ц. 20 к.
  11. Общая теорема теоріи чиселъ съ одной произвольной функціей. Ц. 10 к.
  12. Теорема Эйлера о многогранникахъ. Свойства плоской геометрической сѣти. Ц. 10 к.
  13. Нѣкоторые вопросы числовой алгебры. Ц. 20 к.
  14. Числовыя уравненія второй степени. Ц. 25 к.
  15. Къ теоріи дѣлимости чиселъ. Ц. 20 к.
  16. Къ теоріи функціональныхъ уравненій. Ц. 20 к.
  17. Рѣшеніе одного шахматнаго вопроса помощью числовыхъ функцій. Ц. 20 к.
  18. Нѣкоторыя свойства вычетовъ и числовыхъ суммъ. Ц. 50 к.
  19. Рѣшеніе сравненій второй степени при модулѣ простомъ. Ц. 20 к.
  20. Раціональныя функціи, находящіяся въ связи съ теоріей приближеннаго извлеченія квадратныхъ корней. Ц. 75 к.
  21. Одинъ общій законъ теоріи разбіенія чиселъ. Ц. 50 к.
  22. Свойства одного числоваго интеграла по дѣлителямъ и его различныя примѣненія. Логарифмическія числовыя функціи. Ц. 40 к.
  23. Общіе приемы вычисленія числовыхъ интеграловъ по дѣлителямъ. Естественная классификація цѣлыхъ чиселъ и прерывныхъ функцій. Ц. 60 к.
  24. Общія преобразованія числовыхъ интеграловъ по дѣлителямъ. Ц. 40 к.
  25. Къ теоріи сходимости рядовъ.
  26. Геометрія произвольныхъ величинъ. Ц. 25 к.
  27. Различныя примѣненія начала наибольшихъ и наименьшихъ показателей въ теоріи алгебраическихъ функцій. Ц. 50 к.
  28. Одна общая теорема алгебраическихъ кривыхъ высшаго порядка.
  29. Объ уравненіяхъ пятой степени, разрѣшаемыхъ въ радикалахъ (Бугаевъ и Лахтинъ).
  30. Прерывная геометрія.
  31. Начало наибольшихъ и наименьшихъ показателей въ теоріи дифференціальныхъ уравненій. Цѣлыя частныя интегралы. Ц. 50 к.
  32. Дробные частныя интегралы дифференціальныхъ уравненій. Ц. 15 к.
  33. Выраженіе эллиптическихъ интеграловъ въ конечномъ видѣ. Ц. 40 к.

ОБЩІЯ УСЛОВІЯ  
ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКАГО ДИФФЕРЕНЦІАЛА.

---

Н. В. БУГАЕВА.

---

Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 4 марта 1892 г.

---

ПРИЛОЖЕНИЕ КЪ LXIX-му ТОМУ ЗАПИСОКЪ ИМПЕР. АКАДЕМІИ НАУКЪ.  
№ 8.

---

—○○○○—  
САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1892.

---

ПРОДАЕТСЯ У КОМИСИОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ:

Н. Глазунова, въ С. П. Б.

Н. Киммеля, въ Ригѣ.

Эггерса и Комп., въ С. П. Б.

Цѣна 15 коп.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.  
С.-Петербургъ, Іюнь 1892 года.

Непремѣнный Секретарь, Академикъ *А. Штраухъ*.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

Вас. Остр., 9 л., № 12.



§ 1. Связь между разложением функции въ бесконечный рядъ и подходящими дробями непрерывной дроби.

Если какая нибудь функция  $f(x)$  разлагается по убывающимъ степенямъ переменнаго въ бесконечный рядъ вида:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \frac{\alpha_2}{x^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{x^{n+1}} + \dots \quad (1)$$

то эта же функция разлагается также въ непрерывную дробь вида:

$$f(x) = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots \quad (2)$$

гдѣ  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  суть цѣлые полиномы переменнаго  $x$ .

Обыкновенно полиномы  $q_1, q_2, \dots$  бываютъ выраженіями первой степени, но они могутъ быть и полиномами высшихъ степеней.

Требуется опредѣлить, какимъ условіямъ должны удовлетворять коэффициенты разложенія  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$  для того, чтобы  $n$  звѣньевъ непрерывной дроби (2) зависѣло отъ выраженій  $q_1, q_2, \dots, q_n$  первой степени относительно  $x$  и полиномъ высшей степени  $q_{n+1}$  появился только въ  $n + 1$  звѣнѣ. Наша

задача стало бытъ состоятъ въ томъ, чтобы опредѣлить условія разложенія функціи  $f(x)$  въ непрерывную дробь вида:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1} + \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n x + \beta_n} + \frac{1}{q_{n+1}} + \dots \quad (3)$$

гдѣ полиномъ  $q_{n+1}$  по крайней мѣрѣ выраженіе не ниже второй степени относительно  $x$ .

Не трудно видѣть, что подходящія дроби для функціи  $f(x)$  будутъ:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1} \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1} + \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{P_n}{Q_n} &= \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1} + \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n x + \beta_n} \\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} &= \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1} + \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n x + \beta_n} + \frac{1}{q_{n+1}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Означивъ черезъ  $\delta(Q)$  порядокъ цѣлаго полинома  $Q$ , мы изъ простаго разсмотрѣнія первыхъ  $n$  подходящихъ дробей легко усматриваемъ, что

$$\begin{aligned} \delta(P_1) &= 0, \quad \delta(P_2) = 1, \quad \delta(P_3) = 2, \dots \delta(P_n) = n-1 \\ \delta(Q_1) &= 1, \quad \delta(Q_2) = 2, \quad \delta(Q_3) = 3, \dots \delta(Q_n) = n. \end{aligned} \quad (6)$$

Разность между каждыми двумя подходящими дробями выразится формулами:

$$\begin{aligned}\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} &= -\frac{1}{Q_1 Q_2} \\ \frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{1}{Q_2 Q_3} \\ \frac{P_\mu}{Q_\mu} - \frac{P_{\mu-1}}{Q_{\mu-1}} &= \frac{(-1)^{\mu+1}}{Q_{\mu-1} Q_\mu}.\end{aligned}\tag{7}$$

Разложение функций  $f(x)$  помощью подходящихъ дробей можно представить въ видѣ:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{P_1}{Q_1} + \left(\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1}\right) + \left(\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2}\right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) + \left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right) + \dots\end{aligned}\tag{8}$$

или въ видѣ

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{Q_{n-1} Q_n} + \frac{(-1)^{n+2}}{Q_n Q_{n+1}} + \dots\tag{9}$$

Изъ формулы (9) видно, что имѣетъ мѣсто разность:

$$f(x) - \frac{P_\mu}{Q_\mu} = \frac{(-1)^\mu}{Q_\mu Q_{\mu+1}} + \dots\tag{10}$$

Формула (10) показываетъ, что подходящая дробь  $\frac{P_\mu}{Q_\mu}$  выражаетъ разложение функции  $f(x)$  по убывающимъ степенямъ переменнаго съ точностію до  $\frac{1}{x^{2\mu}}$  включительно или разность  $f(x) - \frac{P_\mu}{Q_\mu}$  будетъ порядка одинаковаго съ выраженіемъ  $\frac{1}{x^{2\mu+1}}$ , если въ  $\mu + 1$  знаменателей у звѣзды непрерывной дроби суть полиномы первой степени.

Положимъ  $n$  знаменателей  $q_1, q_2, \dots, q_n$  суть выраженія первой степени, а полнымъ  $q_{n+1}$  второй степени. Въ этомъ случаѣ для подходящей дроби  $\frac{P_n}{Q_n}$  будемъ имѣть по прежнему

$$\delta(P_n) = n - 1, \quad \delta(Q_n) = n.$$



Для подходящей же дроби  $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$  будемъ имѣть

$$\delta(P_{n+1}) = n+1, \quad \delta(Q_{n+1}) = n+2,$$

то есть знаменатель подходящей дроби  $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$  будетъ полиномомъ  $n+2$  степени.

Изъ ряда (9) вытекаетъ, что

$$f(x) = \frac{P_n}{Q_n} + \frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}} + \frac{(-1)^{n+2}}{Q_{n+1} Q_{n+2}} + \dots \quad (11)$$

то есть подходящая дробь  $\frac{P_n}{Q_n}$  выражаетъ разложеніе функціи  $f(x)$  по убывающимъ степенямъ переменнаго съ точностію до порядка  $\frac{1}{x^{2n+1}}$  включительно, ибо разность

$$f(x) - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}} + \dots$$

будетъ порядка одинаковаго съ выраженіемъ  $\frac{1}{x^{2n+2}}$ , такъ какъ

$$\delta(Q_n Q_{n+1}) = \delta(Q_n) + \delta(Q_{n+1}) = 2n+2.$$

## § 2. Опредѣленіе подходящей дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ .

Положимъ, что въ подходящей дроби

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_n} \quad (12)$$

$n$  полиномовъ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  будутъ полиномами первой степени.

Въ этомъ случаѣ можно положить

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}}{b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_n}. \quad (13)$$

Здѣсь мы имѣемъ  $2n+1$  неизвѣстныхъ коэффициентовъ.

Такъ какъ числителя и знаменателя можно раздѣлить на одинъ изъ коэффициентовъ, то собственно неизвѣстныхъ величинъ будетъ только  $2n$ . Эти величины можно опредѣлить по коэффициентамъ разложенія  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  на томъ основаніи, что подходящая дробь  $\frac{P_n}{Q_n}$  выражаетъ означенное разложеніе съ точностію до  $\frac{1}{x^{2n}}$  включительно.

Такимъ образомъ вообще имѣемъ:

$$\frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{x^{2n}} + R\left(\frac{1}{x}\right) \quad (14)$$

Если же  $q_{n+1}$  будетъ полиномомъ второй степени, то подходящая дробь  $\frac{P_n}{Q_n}$  совпадаетъ съ бесконечнымъ рядомъ до члена порядка  $\frac{1}{x^{2n+1}}$ , то есть справедливо разложеніе

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{x^{2n}} + \frac{\alpha_{2n}}{x^{2n+1}} + R_1\left(\frac{1}{x}\right). \quad (15)$$

Въ означенныхъ разложеніяхъ функцій  $R\left(\frac{1}{x}\right)$  и  $R_1\left(\frac{1}{x}\right)$  содержатъ только члены, зависящіе отъ высшихъ степеней дроби  $\frac{1}{x}$ .

На основаніи уравненія (14), мы, полагая  $x = \frac{1}{y}$ , имѣемъ равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_n\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi_n\left(\frac{1}{y}\right)} &= \frac{(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1}) y}{b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n} = \\ &= y(\alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \dots + \alpha_{2n-1} y^{2n-1}) + R(y). \end{aligned} \quad (16)$$

откуда

$$\frac{a_0 + a_1 y + \dots + a_{n-1} y^{n-1}}{b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n} = \alpha_0 + \alpha_1 y + \dots + \alpha_{2n-1} y^{2n-1} + k y^{2n} + \dots \quad (17)$$

Если же полиномъ  $q_{n+1}$  будетъ второй степени, то справедливо уравненіе (15), которое приметъ видъ:

$$\begin{aligned} \frac{a_0 + a_1 y + \dots + a_{n-1} y^{n-1}}{b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n} &= \alpha_0 + \alpha_1 y + \dots \\ &\dots + \alpha_{2n-1} y^{2n-1} + \alpha_{2n} y^{2n} + k_1 y^{2n+1} + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Прежде чѣмъ приступить къ опредѣленію коэффициентовъ подходящей дроби  $\frac{P_n}{Q_n}$  выведемъ одно

§ 3. Деривационное соотношеніе подобное теоремѣ Лейбница.

Изъ теоремы Лейбница

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = u \frac{d^n v}{dx^n} + n \frac{du}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + \dots + v \frac{d^n u}{dx^n}$$

полагая  $x = 0$ , получимъ деривационное уравненіе:

$$D^n(a_0 b_0) = a_0 D^n b_0 + n D a_0 \cdot D^{n-1} b_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} D^2 a_0 \cdot D^{n-2} b_0 + \dots + b_0 D^n a_0.$$

При вычисленіи дериваций должны имѣть мѣсто равенства:

$$D a_0 = a_1$$

$$D a_1 = 2 a_2$$

$$D a_2 = 3 a_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$D a_n = (n+1) a_{n+1}.$$

Такъ какъ

$$D^\mu(a_0) = 1, 2, 3 \dots \mu a_\mu = \Pi(\mu) a_\mu$$

то формула Лейбница дастъ деривационное уравненіе:

$$D^n(a_0 b_0) = \Pi(\mu) [a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0]. \quad (19)$$

§ 4. Вычисленіе коэффициентовъ подходящей дроби.

Изъ уравненія (17) вытекаетъ при  $y = 0$  деривационное уравненіе

$$a_0 = \alpha_0 b_0.$$

Проводя рядъ послѣдовательныхъ дериваций этого уравненія и принимая во вниманіе соотношеніе (19), получаемъ послѣ сокращеній деривационныя уравненія:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 b_0 \\ a_1 &= \alpha_0 b_1 + \alpha_1 b_0 \\ a_2 &= \alpha_0 b_2 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_0 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= \alpha_0 b_{n-1} + \alpha_1 b_{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} b_0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Эти уравненія даютъ возможность опредѣлить коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  полинова  $P_n$ , какъ скоро извѣстны  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  коэффициенты полнома  $Q_n$  или знаменателя подходящей дроби.

Производя дальнѣйшія дериваціи и принимая во вниманіе, что

$$a_n = 0, \quad a_{n+1} = 0,$$

а также

$$b_{n+1} = 0, \quad b_{n+2} = 0 \text{ и т. д.}$$

имѣемъ слѣдующій рядъ дериваціонныхъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} Da_{n-1} = na_n = 0 &= \alpha_0 b_n + \alpha_1 b_{n-1} + \dots + \alpha_n b_0 \\ 0 &= \alpha_1 b_n + \alpha_2 b_{n-1} + \dots + \alpha_{n+1} b_0 \\ 0 &= \alpha_2 b_n + \alpha_3 b_{n-1} + \dots + \alpha_{n+2} b_0 \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= \alpha_\mu b_n + \alpha_{\mu+1} b_{n-1} + \dots + \alpha_{n+\mu} b_0 \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= \alpha_{n-1} b_n + \alpha_n b_{n-1} + \dots + \alpha_{2n-1} b_0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Такъ какъ  $b_0$  можетъ быть произвольною величиною, то  $n$  величинъ  $b_1, b_2, \dots, b_n$  можно опредѣлить изъ  $n$  уравненій (21) по  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}$ .

Такимъ образомъ всѣ коэффициенты подходящей дроби  $\frac{P_n}{Q_n}$  всегда можно опредѣлить по коэффициентамъ разложенія функціи въ рядъ.





Если полиномъ  $q_{n+1}$  будетъ полиномомъ третьей степени, должно еще къ уравненіямъ (21) и (22) присоединить слѣдующее деривационное уравненіе:

$$0 = \alpha_{n+1} b_n + \alpha_{n+2} b_{n-1} + \dots + \alpha_{2n+1} b_0 \quad (26)$$

Совмѣстное существованіе уравненій (21), (22) и (26) требуетъ существованія двухъ условій:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n, & \alpha_{n+1}, & \dots & \alpha_{2n} \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_{n+1} \\ \alpha_2, & \alpha_3, & \dots & \alpha_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n+1}, & \alpha_{n+2}, & \dots & \alpha_{2n+1} \end{vmatrix} = 0. \quad (28)$$

При помощи выведеннаго нами соотношенія (23), мы можемъ найти тѣ условія, которымъ должны удовлетворять коэффициенты полинома

$$R = p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4$$

для того, чтобы могъ быть представленъ въ конечномъ видѣ эллиптическій интегралъ въ формѣ:

$$\int \frac{(x+A) dx}{\sqrt{p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4}} = \frac{1}{m} \lg \left[ \frac{p+q\sqrt{R}}{p+q\sqrt{R}} \right]. \quad (29)$$

Для этого слѣдуетъ предварительно найти

§ 6. Разложение  $\sqrt{p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4}$  въ рядъ по убывающимъ степенямъ переменнаго.

Положимъ, что

$$\sqrt{p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4} = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{x^2} + \dots \quad (30)$$

Замѣняя  $x$  черезъ  $\frac{1}{y}$ , находимъ послѣ умноженія на  $y^2$  разложение

$$\sqrt{p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3 + p_4 y^4} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n + \dots \quad (31)$$

Изъ равенства (31) вытекаетъ, что

$$a_0 = \sqrt{p_0}$$

$$a_1 = D \sqrt{p_0}$$

$$a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} D^2 (\sqrt{p_0})$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_\mu = \frac{1}{\pi(\mu)} D^\mu (\sqrt{p_0})$$

$$\dots \dots \dots$$

гдѣ знакъ  $D$  есть знакъ дериваціи.

При вычисленіяхъ мы должны принимать во вниманіе дериваціонныя уравненія:

$$Dp_0 = p_1$$

$$Dp_1 = 2p_2$$

$$Dp_2 = 3p_3$$

$$Dp_3 = 4p_4$$

$$Dp_4 = 5p_5 = 0.$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$D \sqrt{p_0} = \frac{p_1}{2\sqrt{p_0}}$$

$$D^2 \sqrt{p_0} = \frac{4p_2 p_0 - p_1^2}{4p_0^{\frac{3}{2}}}$$

$$D^3 \sqrt{p_0} = \frac{24 p_0^2 p_3 - 12 p_0 p_1 p_2 + 3 p_1^3}{8 p_0^{\frac{5}{2}}}$$

и т. д.

Если  $p_0 = 1$

$$[D \sqrt{p_0}]_{p_0=1} = \frac{p_1}{2}$$

$$[D^2 \sqrt{p_0}]_{p_0=1} = \frac{4p_2 - p_1^2}{4}$$

$$[D^3 \sqrt{p_0}]_{p_0=1} = \frac{24 p_3 - 12 p_1 p_2 + 3 p_1^3}{8}$$

Самое разложене (30) по убывающимъ степенямъ переменнаго приметъ видъ:

$$\begin{aligned} \sqrt{p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4} = & \sqrt{p_0} \cdot x^2 + D \sqrt{p_0} \cdot x + \\ & + \frac{D^2 \sqrt{p_0}}{1 \cdot 2} + \frac{D^3 \sqrt{p_0}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{D^4 \sqrt{p_0}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

§ 7. Опредѣленіе условій выраженія въ конечномъ видѣ интеграла.

$$\int \frac{(x+A) dx}{\sqrt{x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4}}.$$

Абель доказалъ, что интеграль этотъ выражается въ конечномъ видѣ въ формѣ уравненія

$$\int \frac{(x+A) dx}{\sqrt{x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4}} = \int \frac{(x+A) dx}{\sqrt{R}} \frac{1}{m} \lg \left[ \frac{p+q \sqrt{R}}{p-q \sqrt{R}} \right] \quad (29)$$

въ томъ случаѣ, когда  $\sqrt{R}$  разлагается въ періодическую непрерывную дробь. Это же бываетъ тогда, когда одно изъ звѣнцевъ непрерывной дроби зависитъ отъ квадратнаго полинома.



$$\begin{vmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \dots & \alpha_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n, & \alpha_{n+1}, & \dots & \dots & \alpha_{2n} \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$
$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \left[ \frac{D^3 \sqrt{p_0}}{1.2.3} \right]_{p_0=1} \\ \alpha_1 &= \left[ \frac{D^4 \sqrt{p_0}}{1.2.3.4} \right]_{p_0=1} \\ \alpha_2 &= \left[ \frac{D^5 \sqrt{p_0}}{\Pi(5)} \right]_{p_0=1} \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_n &= \left[ \frac{D^{n+3} \sqrt{p_0}}{\Pi(n+3)} \right]_{p_0=1}.\end{aligned}$$
$$\alpha_0 = \left[ \frac{1}{1.2.3} D^3 \sqrt{p_0} \right]_{p_0=1} = 0. \quad (33)$$
$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2 = 0$$

или

$$\left[ \frac{1}{1.2.3} D^3 \sqrt{p_0} \cdot \frac{1}{1.2.3.4.5} D^5 \sqrt{p_0} - \left( \frac{1}{1.2.3.4} D^4 \sqrt{p_0} \right)^2 \right]_{p_0=1} = 0$$

или

$$\left[ 4 D^3 \sqrt{p_0} \cdot D^5 \sqrt{p_0} - 5 \left( D^4 \sqrt{p_0} \right)^2 \right]_{p_0=1} = 0 \quad (34)$$

Условіе (33), написанное въ развернутомъ видѣ даетъ послѣ сокращенія соотношеніе:

$$8 p_3 + 4 p_1 p_2 + p_1^3 = 0. \quad (33a)$$

Соотношеніе (34) является въ болѣе сложной формѣ.

Мы видимъ, что существуетъ безчисленное множество условий интегрируемости въ конечномъ видѣ эллиптического дифференціала.

Величину  $D^n \sqrt{p_0}$  можно опредѣлить или непосредственной дериваціей или послѣдовательнымъ вычисленіемъ по формуламъ, выводимымъ изъ уравненія (31).

Возвысивъ въ квадратъ уравненіе (31), имѣемъ:

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4 = \\ = \left[ \sqrt{p_0} + D_1 x + \frac{D_2}{1.2} x^2 + \frac{D_3}{1.2.3} x^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (35)$$

гдѣ для краткости полагаемъ:

$$D_1 = D \sqrt{p_0}$$

$$D_2 = D^2 \sqrt{p_0}$$

$$D_3 = D^3 \sqrt{p_0}$$

$$\dots \dots \dots$$



Уравненіе (35) даетъ рядъ соотношеній

$$2\sqrt{p_0} D_1 = p_1$$

$$D_1^2 + \sqrt{p_0} D_2 = p_2$$

$$p_0^{\frac{1}{2}} D_3 + 3 D_1 D_2 = 3 p_3$$

$$\sqrt{p_0} D_4 + 4 D_1 D_3 + 3 D_2^2 = 12 p_4.$$

Вообще для четнаго числа  $n = p$  большаго 4 имѣемъ:

$$\sqrt{p_0} \frac{D_p}{\Pi(p)} + \frac{2D_1 D_{p-1}}{\Pi(p-1)} + \frac{2D_2 D_{p-2}}{\Pi(2) \Pi(p-2)} + \dots + \left[ \frac{D_{\frac{p}{2}}}{\Pi(\frac{p}{2})} \right]^2 = 0. \quad (36)$$

Для нечетнаго числа  $n = i$  большаго четырехъ имѣемъ:

$$\sqrt{p_0} \frac{D_i}{\Pi(i)} + \frac{D_1 D_{i-1}}{\Pi(i-1)} + \frac{D_2 D_{i-2}}{\Pi(2) \Pi(i-2)} + \dots = 0. \quad (37)$$

Прилагая наши вычисленія къ примѣру

$$\int \frac{(x+A) dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - x}} \quad (38)$$

имѣемъ:

$$p_0 = 1, p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -1, p_4 = 0$$

$$D_1 = 0, D_2 = -2, D_3 = -3, D_4 = -12, D_5 = -60$$

$$\alpha_0 = \frac{D_3}{1.2.3} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{D_4}{1.2.3.4} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{D_5}{1.2.3.4.5} = -\frac{1}{2}.$$



Наше условіе даетъ

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2 = 0,$$

слѣдовательно интеграль (38) выражается въ конечномъ видѣ.

Дѣйствительно имѣемъ:

$$\int \frac{(x + \frac{1}{2}) dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - x}} = \frac{1}{6} \lg \left[ \frac{2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 + (2x - 2) \sqrt{x^4 - 2x^2 - x}}{2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 - (2x - 2) \sqrt{x^4 - 2x^2 - x}} \right].$$

## ДОПОЛНЕНІЕ.

§ 8. Предложенный мною способъ полученія условій интегрируемости есть въ тоже время и особый деривационный методъ для рѣшенія задачи Абеля. Давая нѣкоторыя уравненія, сходныя съ уравненіями Абеля \*), онъ даетъ возможность вывести легко и всѣ остальные его уравненія. Отличаясь простотою и точностію, онъ не ведетъ однако къ тѣмъ недоразумѣніямъ, которыя возбуждаются приемомъ Абеля. Абель, находя изъ уравненія

$$P^2 - RQ^2 = 1$$

суживаетъ задачу. Прилагая свои выводы, онъ даетъ примѣръ справедливый при произвольномъ  $\alpha$ , но въ которомъ

$$P^2 - RQ^2 = \frac{\alpha^2 - 8\alpha + 16}{4}$$

и слѣдовательно

$$P^2 - RQ^2 \text{ не равно } 1 \text{ при произвольномъ } \alpha.$$

---

\*) Abel. Oeuvres complètes d'Abel. 1839. Т. II, стр. 141—146.



Вслѣдствіе этого его методъ недостаточенъ и можетъ по-  
вести къ невѣрнымъ заключеніямъ.

Общую формулу для выраженія  $D^n(\sqrt{p_0})$ , входящаго въ мое  
условіе интегрируемости (23), легко получить, слѣдуя тѣмъ  
пріемамъ, которые изложены мною на стр. 147—162, а также  
на стр. 134—136 моего сочиненія: Общія основанія исчисле-  
нія  $E(\varphi x)$ .

—○○○○—

450-